

**ΜΑΘΗΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014**

*ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΛΥΣΕΩΝ*

**ΘΕΜΑ Α**

A1. Σχολικό βιβλίο σελ 251

A2. Σχολικό βιβλίο σελ 273

A3. Σχολικό βιβλίο σελ 150

A4.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

**ΘΕΜΑ Β**

B1.

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$

$$2|z|^2 + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(|z|^2 - 2) + 2(x-1)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(|z|^2 - 2) = 0 \text{ και } 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} |z|^2 = 2 = x^2 + y^2 \\ x=1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y^2 = 1 \\ x=1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=1 \text{ και } y=1 \\ \text{ή} \\ x=1 \text{ και } y=-1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$z_1 = 1+i \text{ και } z_2 = 1-i$$

B2.

$$\begin{aligned} w &= 3 \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{39} = 3 \left( \frac{1+i}{1-i} \right)^{39} = 3 \left( \frac{(1+i)^2}{1^2+1^2} \right)^{39} = 3 \left( \frac{1+2i+i^2}{2} \right)^{39} = 3i^{39} = \\ &= 3i^{4 \cdot 9 + 3} = 3i^3 = 3i^2 i = -3i \end{aligned}$$

B3.

$$|u+w| = |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow$$

$$|u-3i| = |4(1+i) - (1-i) - i| \Leftrightarrow$$

$$|u-3i| = |4+4i-1+i-i| \Leftrightarrow$$

$$|u-3i| = |3+4i| \Leftrightarrow$$

$$|u-3i| = 5 \Leftrightarrow$$

$$|u-(0+3i)| = 5 \Leftrightarrow$$

$$(MK)=5$$

Οπότε το σημείο Μ κινείται σε κύκλο (Κ,5) κέντρου Κ(0,3).

### ΘΕΜΑ Γ

$$h(x) = x - \ln(e^x + 1)$$

Γ1.

$$h'(x) = (x - \ln(e^x + 1))' = x' - (\ln(e^x + 1))' =$$

$$1 - \frac{1}{e^x + 1} (e^x + 1)' = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$h''(x) = \left( \frac{1}{e^x + 1} \right)' = - \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$$

Οπότε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  η  $h(x)$  είναι κοίλη.

Γ2.

Παρατηρούμε πως

$$h(1) = 1 - \ln(e^1 + 1) = \ln e - \ln(e + 1) = \ln \frac{e}{e + 1}$$

Οπότε:

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e + 1} \Leftrightarrow$$

$$\ln e^{h(2h'(x))} < \ln \frac{e}{e + 1} \Leftrightarrow$$

$$h(2h'(x)) < h(1) \Leftrightarrow$$

$$2h'(x) < 1 \Leftrightarrow$$

$$h'(x) < \frac{1}{2} = h'(0) \Leftrightarrow$$

$$x > 0$$

Αφού  $h$  κοίλη στο  $\mathbb{R}$ ,  $h'$  γνησια φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$

Γ3.

Για την οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Αν  $u = \frac{e^x}{e^x + 1}$ ,  $u \rightarrow 1$  αν  $x \rightarrow +\infty$  αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = \ln 1 = 0, \text{ δηλαδή έχει οριζόντια την } y=0$$

Για την πλάγια ασύμπτωτη στο  $-\infty$ , της μορφής  $y = ax + \beta$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\ln(e^x + 1)}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \ln(e^x + 1) \frac{1}{x}\right) = 1 - 0 = 1 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(e^x + 1)) = 0 = \beta$$

Οπότε έχει πλάγια ασύμπτωτη στο  $-\infty$  την  $y=x$

Γ4.

Βρίσκουμε που η  $\phi(x)$  τέμνει τον  $x'x$ .

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x(h(x) + \ln 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$h(x) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$h(x) = -\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$h(x) = h(0) \Leftrightarrow$$

$$x = 0$$

Είναι  $h \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow h(x) > h(0) \Rightarrow h(x) > -\ln 2 \Rightarrow h(x) + \ln 2 > 0$

Οπότε για το εμβαδόν έχουμε

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |e^x(h(x) + \ln 2)| dx = \int_0^1 e^x \left(\ln \frac{e^x}{e^x + 1} + \ln 2\right) dx = \\ &= \int_0^1 e^x \ln \frac{2e^x}{e^x + 1} dx \quad \begin{array}{l} \text{Αν } u = e^x = g(x) \\ g(1) = e^1 = e \\ g(0) = e^0 = 1 \\ du = e^x dx \end{array} \int_1^e \ln \frac{2u}{u+1} du = \int_1^e (\ln 2u - \ln(u+1)) du = \\ &= \int_1^e \ln 2u du - \int_1^e \ln(u+1) du = I_1 - I_2 \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_1^e \ln 2u du = \frac{1}{2} \int_1^e (2u)' \ln 2u du = \frac{1}{2} ([2u \ln u]_1^e - \int_1^e 2u \frac{1}{2u} (2u)' du) =$$

$$= \frac{1}{2} (2e \ln(2e) - 2 \ln 2 - \int_1^e 2 du) = e \ln(2e) - \ln 2 - [u]_1^e = e \ln(2e) - \ln 2 - e + 1$$

$$I_2 = \int_1^e \ln(u+1) du = \int_1^e (u+1)' \ln(u+1) du = [(u+1) \ln(u+1)]_1^e - \int_1^e (u+1) \frac{1}{u+1} (u+1)' du =$$

$$= (e+1) \ln(e+1) - (1+1) \ln(1+1) - \int_1^e 1 du = (e+1) \ln(e+1) - 2 \ln 2 - [u]_1^e = (e+1) \ln(e+1) - 2 \ln 2 - e + 1$$

Άρα

$$E = I_1 - I_2 = e \ln(2e) - \ln 2 - e + 1 - ((e+1) \ln(e+1) - 2 \ln 2 - e + 1) =$$

$$= e \ln(2e) - \ln 2 - e + 1 - e \ln(e+1) - \ln(e+1) + 2 \ln 2 + e - 1 =$$

$$= e(\ln(2e) - \ln(e+1)) - [\ln(e+1) - \ln 2] =$$

$$= e \ln \frac{2e}{e+1} - \ln \frac{e+1}{2} =$$

$$= \ln \frac{\left(\frac{2e}{e+1}\right)^e}{\frac{e+1}{2}} = \ln \left[ \left(\frac{2}{e+1}\right)^{e+1} e^e \right]$$

### ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Δ1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\text{Απροσδιόριστη μορφή } \frac{0}{0}}{=} \stackrel{\text{De L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1 = f(0)$$

Οπότε η f(x) είναι συνεχής στο x=0

$$f'(x) = \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)' = \frac{(e^x - 1)' x - (e^x - 1) x'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

Θέτουμε  $g(x) = xe^x - e^x + 1$

Οπότε

$$g'(x) = (xe^x - e^x + 1)' = x'e^x + x(e^x)' - e^x = xe^x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \stackrel{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'(x)	-	0	+
g(x)	$\searrow$		$\nearrow$

Δηλαδή η g(x) παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x=0 το g(0)=0, συνεπώς

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow xe^x - e^x + 1 \geq 0 \text{ .το ισον ισχυει αν } x=0$$

Άρα  $f'(x) > 0$  αφού  $xe^x - e^x + 1 > 0$  και  $x^2 > 0$  για  $x \neq 0$  και

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} > 0
 \end{aligned}$$

οπότε  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  δηλαδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αφού  $f$  είναι και συνεχής στο  $x=0$ .

Δ2.

(α)

$2f'(x)$

$$\int_1^{2f'(x)} f(u) du = 0 \Leftrightarrow F(2f'(x)) - F(1) = 0 \Leftrightarrow F(2f'(x)) = F(1)$$

Όπου  $F$  μία αρχική της  $f$ , οπότε

$$F'(x) = f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x}$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	$0$	$+$
$x$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$+$	$0$	$+$

$$f(x) > 0, \forall x \neq 0$$

$$f(0) = 1 > 0 \text{ άρα } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα  $F$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και 1-1 άρα:

$$F(2f'(x)) = F(1) \stackrel{F: 1-1}{\Leftrightarrow}$$

$$2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0) \Leftrightarrow x = 0$$

Αφού  $f$  κυρτή είναι  $f' \nearrow$  και  $x = 0$  μοναδική λύση.

(β)

Ισχύει ότι:

$$y(t_0) = f(x(t_0))$$

$$y'(t) = (f(x(t)))' = f'(x(t)) \cdot x'(t) \stackrel{x'(t)=2y'(t)}{=} f'(x(t))2y'(t)$$

Για  $t=t_0$

$$y'(t_0) = f'(x(t_0))2y'(t_0)$$

$$1 = 2f'(x(t_0)) \text{ αφού } x'(t_0) = 2y'(t_0) > 0$$

$$f'(x(t_0)) = \frac{1}{2} = f'(0) \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow}$$

$$x(t_0) = 0$$

Και επομένως το σημείο είναι:

$$M(x(t_0), f(x(t_0)))$$

$$M(0, f(0))$$

$$M(0,1)$$

Δ3.

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x-2)^2, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$g(x) = \left( x \frac{e^x - 1}{x} + 1 - e \right)^2 (x-2)^2 = (e^x - e)^2 (x-2)^2$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(e^x - e)(e^x - e)'(x-2)^2 + 2(x-2)(e^x - e)^2 = \\ &= 2(e^x - e)e^x(x-2)^2 + 2(x-2)(e^x - e)^2 = \\ &= 2(x-2)(e^x - e)[e^x(x-2) + e^x - e] = \\ &= 2(x-2)(e^x - e)[e^x(x-1) - e] \end{aligned}$$

Θέτουμε  $\phi(x) = e^x(x-1) - e, \quad x \in (0, +\infty)$

$\phi'(x) = xe^x > 0$  άρα φ γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

- $\phi(1) = -e < 0$
- $\phi(2) = e^2 - e = e(e-1) > 0$

Ακόμα, φ συνεχής στο  $[1, 2]$

Άρα από Θ. Bolzano

$$\exists x_0 \in (1, 2) : \phi(x) = 0$$

και  $\phi \nearrow [0, +\infty)$  οπότε το  $x_0$  είναι μοναδικός

$$x > x_0 \stackrel{\phi \nearrow}{\Rightarrow} \phi(x) > \phi(x_0) = 0$$

$$x < x_0 \stackrel{\phi \nearrow}{\Rightarrow} \phi(x) < \phi(x_0) = 0$$

x	0	1	$x_0$	2	$+\infty$
$2(e^x - e)$	-	0	+		+
x-2	-		-		-
φ(x)	-		-	0	+
g'	-	0	+	0	-
g		↘		↗	
			↘		↗
	T.E. T.M. T.E.				

Άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο στα  $x=1$  και  $x=2$  και τοπικό μέγιστο στο  $x = x_0$